Exercices : Théorie d'Iwasawa.

Tatiana Beliaeva

Ces exercices portent à la fois sur le matériel du cours sur la théorie d'Iwasawa et celui sur la conjecture de Bloch-Kato. Trois séances sont donc concernées : celles de lundi, mardi et mercredi matin. Tous les exercices ne seront pas traités, mais j'invite toute personne intéressée par le sujet à traiter autant d'exercices que possible. Les solutions, les idées et des questions peuvent être envoyées à Tatiana Beliaeva et je suis disponible tout au long de la semaine.

Les exercices qui ont été traités pendant les trois cours :

Séance 1 : exercices 1 et le début de 2.

Séance 2 : exercice 8 et 9.

Séance 3 : exercices 10 et 14.

N'hésitez pas à vous servir de résultats énoncés dans les exercices précédents, même ceux que vous n'avez pas traités.

Généralités sur les $\mathbb{Z}_p$-extensions.

Exercice 1. Donner un exemple d'une $\mathbb{Z}_p$-extension non cyclotomique.

Exercice 2. Démontrer le théorème d'Iwasawa sur le comportement asymptotique des ordres des p-groupes de classes lorsque p ne divise pas l'ordre du groupe des classes du corps de base et un seul idéal premier se ramifie dans la $\mathbb{Z}_p$-extension.

Indication : Dans un p-groupe tout sous-groupe maximal est distingué (on peut l'admettre).

Exercice 3. Soit F un corps de nombres et p un nombre premier totalement décomposé dans F. Montrer que $\lambda \geq r_2$, où λ est l'invariant λ de la $\mathbb{Z}_p$-extension cyclotomique de F et r_2 est le nombre de couples de plongements complexes de F.

Exercice 4. Soit k un corps de nombres et k_∞ une $\mathbb{Z}_p$ extension de k. Supposons que k contient ζ_p, la racine primitive p-ième de l'unité, et qu'il existe t idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \dots \mathfrak{p}_t$ de k qui sont premiers à p et qui se décomposent totalement dans k_∞.

Soit $\alpha \in k^*$ tel que $v_{\mathfrak{p}_i}(\alpha) = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$. On pose $K = k(\sqrt[p]{\alpha})$ et $K_\infty = k_\infty K$.

1. Montrer que K_∞/K est une $\mathbb{Z}_p$-extension.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note s_n le nombre d'idéaux de k_n qui se ramifient dans K_n.

   Montrer que l'invariant μ de cette extension est non nul. *Indication : montrer que pour tout n $e_n \geq s_n - [k_n : \mathbb{Q}]$,*

   Rappel : Soit σ un générateur de $Gal(K_n/k_n)$, E_n le groupe des unités de k_n et E_n' le groupe des unités de k_n qui sont des normes des élément de K_n. Alors on a la formule suivante (formule de genres) :

$$[Cl(K_n) : Cl(K_n)^{1-\sigma}] = \frac{h_n p^{s_n - 1}}{[E_n : E_n']}.$$

3. Donner un exemple d'une $\mathbb{Z}_p$-extension dont l'invariant μ est non nul.

Généralités sur les Λ-modules

Exercice 5. Soit $f, g \in \Lambda$ tels que $(f, g) = (1)$. Montrer que

1. $\Lambda/(f) \oplus \Lambda/(g) \sim \Lambda/(fg)$.
2. $\Lambda/(fg) \sim \Lambda/(f) \oplus \Lambda/(g)$.

Exercice 6. Donner un exemple de deux Λ-modules M et M', tels que $M \sim M'$ mais $M' \not\sim M$.

Exercice 7. Soit M un Λ-module de type fini. Montrer que les propositions suivantes dont équivalentes :

1. M est Λ-libre.
2. M est sans Λ-torsion et M_Γ est $\mathbb{Z}_p$-libre.
3. $M^\Gamma = 0$ et M_Γ est $\mathbb{Z}_p$-libre.

Indication : utiliser la suite exacte définie par la multiplication par T.

Exercice 8. Soit M un Λ-module de torsion et f sa série caractéristique. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. M^Γ est fini.
2. M_Γ est fini.
3. $f(0) \neq 0$.

Exercice 9. Soit M un Λ-module. Le quotient de Herbrandt de M est défini par

$$Q(M) = \frac{|M^\Gamma|}{|M_\Gamma|}.$$

1. Montrer que si M est fini, alors $Q(M) = 1$.
2. Soit $0 \to A \to B \to C \to 0$ une suite exacte de Λ-modules. Montrer que $Q(B) = Q(A)Q(C)$, au sens où si deux quotients sont bien définis, alors le troisième l'est aussi et l'égalité est vérifiée.
3. Soit $f \in \Lambda$ tel que $f(0) \neq 0$ et soit $M = \Lambda/(f)$. Montrer que $Q(M) = |f(0)|_p$.

Indication : appliquer le lemme du serpent et se ramener aux modules élémentaires.

Autour de la conjecture principale.

Soit F un corps de nombres et $F_\infty = \bigcup F_n$ son extension $\mathbb{Z}_p$-cyclotomique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note A_n le groupe de Galois de la p-extension abélienne non ramifiée maximale de F_n, $\mathfrak{X}_n$ le groupe de Galois de la pro-p-extension abélienne p-ramifiée maximale de F_n et $\mathfrak{X}_\infty$ le groupe de Galois de la pro-p-extension abélienne p-ramifiée maximale de F_∞. On pose $X_\infty = \varprojlim A_n$ et il existe un isomorphisme canonique $\mathfrak{X}_\infty \simeq \varprojlim \mathfrak{X}_n$

Exercice 10.

1. Soit $F = \mathbb{Q}(\zeta_p)^+$. On suppose que la Conjecture de Vandiver est vérifiée pour F. On note $\bar{U}_\infty = \varprojlim U_n \otimes \mathbb{Z}_p$, $\bar{C}_\infty = \varprojlim C_n \otimes \mathbb{Z}_p$ et $\mathcal{U}_\infty = \varprojlim \mathcal{U}_n \otimes \mathbb{Z}_p$, où U_n est le module des unités, C_n celui des unités cyclotomiques et $\mathcal{U}_n$ celui des unités semi-locales de F_n.
   En appliquant l'exercice 2 et la suite exacte d'inertie à 4 termes, montrer alors que la Conjecture Principale est alors vérifiée.
   Indications :
   - *La suite exacte d'inertie :*
   $$0 \longrightarrow \bar{U}_\infty/\bar{C}_\infty \longrightarrow \mathcal{U}_\infty/\bar{C}_\infty \longrightarrow \mathfrak{X}_\infty \longrightarrow X_\infty \longrightarrow 0$$
   - *On a vu dans le cours que la Conjecture principale est équivalente à l'égalité de séries caractéristiques de $\bar{U}_\infty/\bar{C}_\infty$ et X_∞.*
   - *Si la conjecture de Vandiver est vérifiée, alors $X_\infty = 0$ (voir l'exercice 2).*
   - *La formule d'indice d'unités cyclotomiques : $[\bar{U}_n : \bar{C}_n] = h_n$.*
2. Soit F totalement réel. On suppose que X_∞ est fini (conjecture de Greenberg). Montrer que la conjecture principale est vérifiée.

Exercice 11. En supposant que F admet une seule p-place qui se ramifie totalement dans F_∞, montrer que $(X_\infty)_\Gamma \simeq A_0$.
Indication : dans le cas d'une seule place qui se ramifie totalement, pour tout $n \geq 0$ $A_n \simeq X_\infty/((1+T)^{p^n} - 1)X$.

Exercice 12. Montrer que la suite naturelle $(\mathfrak{X}_\infty)_\Gamma \longrightarrow \mathfrak{X}_0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ est une suite exacte courte. En déduire que si F est totalement réel et vérifie la conjecture de Leopoldt, alors $(\mathfrak{X}_\infty)_\Gamma = (Tor_\Lambda \mathfrak{X}_\infty)_\Gamma \simeq Tor_{\mathbb{Z}_p}\mathfrak{X}_0$
Indication : écrire la suite d'inflation-restriction pour $G_S(F) \twoheadrightarrow \Gamma$ à valeurs dans $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$.

Les exercices 11 et 12 sont des résultats généraux qui ne sont pas directement liés à la Conjecture Principale, mais ils sont nécessaires pour l'exercice suivant.

Exercice 13. Soit $F = \mathbb{Q}(\mu_p)^+$. On note $f(T)$ la série caractéristique de $\mathfrak{X}_\infty^+$.
On rappelle que la Conjecture Principale s'énonce ainsi :

$$\zeta_{F,p}(s) = \frac{f((1+p)^s - 1)}{(1+p)^s - 1},$$

où $\zeta_{F,p}(1-n) = \zeta(1-n)(1-p^{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, $n \equiv 0 \mod p-1$.

1. Montrer que la série caractéristique de $\mathfrak{X}_\infty^+(-n)$ est $f((1+p)^n(1+T) - 1)$. En déduire, en utilisant les exercices 8, 9, 11 et 12, que
   $$\zeta(1-n) \sim_p \zeta_{F,p}(1-n) \sim_p \frac{f((1+p)^n - 1)}{(1+p)^n - 1},$$
   où $\sim_p$ signifie "même valuation p-adique".
2. On se propose ici de redémontrer, en utilisant la Conjecture Principale, quelques résultats classiques sur les nombres de Bernoulli.
   Rappel : $\zeta(1-n) = -\dfrac{B_n}{n}$.

(a) **Congruence de Kummer** : Soit $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \equiv n \not\equiv 0 \mod p-1$. Alors $\frac{B_n}{n}$ et $\frac{B_m}{m}$ sont des p-entiers et

$$\frac{B_n}{n} \equiv \frac{B_m}{m} \mod p.$$

(b) **Critère de Kummer** : Le premier p est régulier si et seulement si p ne divise pas les numérateurs de B_2, B_4,...B_{p-3}.

(c) **Théorème de von Staudt-Clausen** : $\frac{B_n}{n}$ est p-entier si $x \not\equiv 0 \mod (p-1)$ et $\frac{B_n}{n} \sim_p \frac{1}{p}$ si $x \equiv 0 \mod (p-1)$.

Exercice 14. Montrer que si $\mu_p \subset F$, alors $\mathfrak{X}_\infty^+ \simeq \mathrm{Hom}\,(\mathrm{A}_\infty^-, \mu_{\mathrm{p}^\infty})$.
Indication : utiliser la suite exacte de Kummer.

Exercice 15. *Nécessite l'accouplement de Kummer.*
Soit E un corps totalement réel, $F = E(\mu_p)$, E_∞ et F_∞ leurs $\mathbb{Z}_p$-extensions cyclotomiques, $\Delta = Gal(F_\infty/E_\infty)$ et $A_\infty = \varinjlim A_n$. Soit f la série caractéristique de $\mathfrak{X}_\infty^+$ et g la série caractéristique de X_∞^-.

1. Quelle est la relation entre f et g ?
2. Soit i, j tels que $i \not\equiv 1 \mod |\Delta|$ et $i + j \equiv 1 \mod |\Delta|$. Si f_i et g_j sont des séries caractéristiques de $e_i\mathfrak{X}_\infty$ et e_jX_∞ respectivement, quelle est la relation entre f_i et g_j ? Ici e_i et e_j désignent les idempotents correspondant aux puissances i et j du caractère de Teichmuller de Δ.